# 1 Décharge d'un condensateur dans une bobine

## 1. Principe et schéma du montage

- L'interrupteur (K) étant sur la position (1), le condensateur de capacité $C$ se charge. La charge est terminée lorsque $u_c = U_0$. La valeur de l'énergie potentielle électrostatique stockée dans le condensateur est alors : $E = \frac{1}{2} C u_c^2 = \frac{1}{2} C U_0^2$.
- L'interrupteur (K) est alors basculé sur la position (2). Le condensateur se décharge dans le conducteur ohmique $R$ et la bobine $L$.

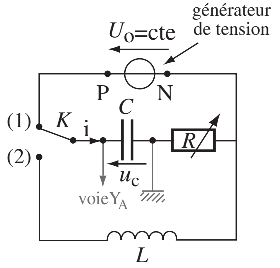

Fig. 8-1

- L'oscilloscope à mémoire, branché aux bornes du condensateur, permet d'étudier le régime transitoire qui règne lors de cette décharge.

## 2. Observations

Suivant la résistance $R$ du circuit, on peut observer deux régimes de décharge.

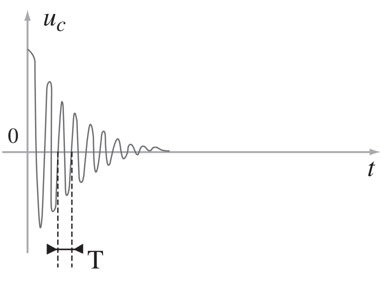

Fig. 8-2

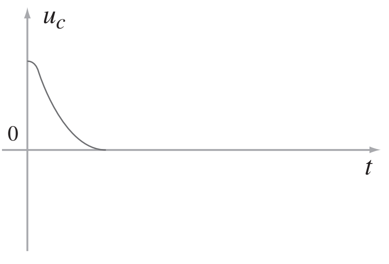

Fig. 8-3

- **Lorsque la résistance est faible** (fig. 8-2) : la décharge du condensateur n'est pas instantanée, elle donne lieu à des oscillations libres. La tension évolue d'une façon quasi périodique autour de la valeur 0 ; son amplitude diminue au cours du temps. Il s'agit d'un **régime pseudo-périodique**. $T$ représente la pseudo-période des oscillations.
- **Lorsque la résistance est grande** (fig. 8-3) : la tension $u_c$ s'annule sans oscillation. Il s'agit d'un **régime apériodique**.

*Remarque : le régime apériodique pour lequel l'annulation de la tension est la plus rapide est appelé **régime apériodique critique**. Il marque la limite entre le régime pseudo-périodique et le régime apériodique. La résistance du circuit est égale à une valeur critique $R_C$ telle que : $R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.*

## 3. Pseudo-période

- La pseudo-période $T$ des oscillations libres est d'autant plus grande que l'inductance $L$ est grande et/ou que la capacité $C$ est grande.

## Exemple d'application

On ferme un circuit constitué d'un condensateur de capacité $C$ préalablement chargé, d'une bobine d'inductance $L$, de résistance nulle et d'un conducteur ohmique de faible résistance $R$, montés en série. La valeur de $R$ est telle que la tension aux bornes du condensateur est pseudo-périodique.

**1.** Faire une analyse dimensionnelle du produit $LC$.

**2.** En déduire la relation qui doit probablement exister entre la pseudo-période du phénomène observé et le produit $LC$.

### Corrigé commenté

***Indication** : pour réaliser l'analyse dimensionnelle, rappelez les formules définissant les grandeurs considérées.*

**1.** La tension aux bornes d'une bobine est : $u_L = L.\frac{di}{dt}$ d'où : $[L] = \frac{[U][T]}{[I]}$ (1).

D'autre part, d'après l'expression de la tension aux bornes d'un condensateur et d'après la définition de l'intensité d'un courant, on a : $[C] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{[I][T]}{[U]}$ (2).

De (1) et (2), on déduit : $[L.C] = \frac{[U][T]}{[I]} = \frac{[I][T]}{[U]}$ soit : $\boxed{[L.C] = [T]^2}$.

**2.** On a observé que la pseudo-période $T$ des oscillations libres est d'autant plus grande que l'inductance $L$ est grande et/ou que la capacité $C$ est grande. Elle varie donc dans le même sens que le produit $LC$.

D'après l'étude dimensionnelle, on peut donc présumer que la pseudo-période est proportionnelle à $\sqrt{LC}$, soit : $\boxed{T = k.\sqrt{L.C}}$.

# 2 Étude d'un circuit LC

## 1. Principe

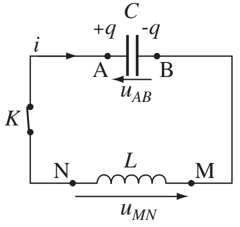

Fig. 8-4

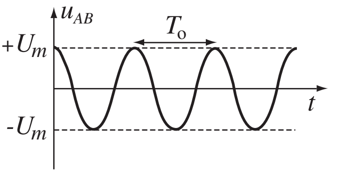

Fig. 8-5

● Soit le circuit constitué d'une bobine d'inductance $L$ et de résistance nulle, associée à un condensateur de capacité $C$ initialement chargé (fig. 8-4). À la fermeture du circuit, on obtient un **régime périodique** (fig. 8-5). Un tel circuit $LC$ de résistance nulle constitue un oscillateur électrique de période propre $T_o$.

## 2. Étude théorique

● À chaque instant, d'après l'additivité des tensions, on a : $u_{AB} + u_{MN} = 0$.
À la date $t$, la charge portée par l'armature $A$ est $q(t)$ et la tension aux bornes du condensateur est : $u_{AB}(t) = \dfrac{q(t)}{\mathrm{C}}$.
Aux bornes de la bobine, on a : $u_{MN}(t) = r\,i(t) + L\,\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$ et comme $r = 0$, $u_{MN}(t) = L\,\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$.
Or, par définition de l'intensité d'un courant : $i(t) = \dfrac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{q}$.
L'équation différentielle régissant la variation de la charge $q$ du condensateur dans le temps est donc : $L\,\dfrac{\mathrm{d}^2 q(t)}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{q(t)}{\mathrm{C}} = 0$.
Cette équation peut encore s'écrire : $\boxed{\ddot{q} + \dfrac{1}{\mathrm{LC}}\,q = 0}$.

● La solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$\boxed{q(t) = \mathrm{Q}_m \cos(\omega_0 t + \phi_0)},\ \text{avec } \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{2\pi}{T_0}.$$

$\omega_o$ est la pulsation propre du circuit (en rad.s$^{-1}$), $\mathrm{Q}_m$ est l'amplitude (en coulomb) et $\phi_o$ est la phase à l'origine des dates (en rad).

● Un circuit $LC$ est un **oscillateur électrique harmonique** qui est le siège d'oscillations électriques libres, non amorties, de période propre :

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}}\,.$$

## Exemple d'application

Un circuit série est constitué d'un condensateur de capacité $C$ = 2 µF préalablement chargé, d'une bobine d'inductance $L$ = 5 mH, de résistance supposée nulle et d'un interrupteur ouvert. La tension aux bornes du condensateur est $U_0$ = 6 V. À la fermeture du circuit, on observe la tension aux bornes du condensateur à l'aide d'un oscilloscope à mémoire.

**1.** Quel type d'oscillogramme doit-on obtenir ?

**2.** Calculer la période propre et la fréquence propre du circuit ainsi constitué.

**3.** En fait, la résistance de la bobine est $R$ = 27 Ω. Que peut-on observer sur l'écran de l'oscilloscope ?

### Corrigé commenté

**1.** ***Indication :*** *les différents régimes que l'on peut observer sont directement liés à la résistance totale du circuit.*

La résistance du circuit étant nulle, celui-ci constitue un oscillateur électrique harmonique : le régime est périodique. On peut observer un oscillogramme du type de la figure 8-5, avec $U_m$ = 6 V.

**2.** ***Rappel :*** *la fréquence (en hertz) est l'inverse de la période (en secondes).*

La période propre de ce circuit est : $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$. On en déduit la fréquence : $f_0 = \dfrac{1}{T_0}$.

AN : $T_0 = 2\pi\sqrt{5.10^{-3}\times 2.10^{-6}} \approx 6{,}3.10^{-4}\ \text{s} = \mathbf{0{,}63\ ms}$.

$$f_0 \approx \frac{1}{6{,}3.10^{-4}} \approx 1{,}6.10^{3}\ \text{Hz} = \mathbf{1{,}59\ kHz}.$$

Dès que la résistance du circuit n'est pas nulle, le régime est soit pseudo-périodique, soit apériodique suivant la valeur de cette résistance et la valeur de la résistance critique. Pour le montage étudié, la résistance critique est :

$$R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}\text{, soit } R_c = 2\sqrt{\frac{5.10^{-3}}{2.10^{-6}}} = \mathbf{100\ \Omega}.$$

La résistance du circuit étant inférieure à la résistance critique, le régime est pseudo-périodique.

# 3 Tension, intensité et énergie

## 1. Tension instantanée aux bornes du condensateur

- $u_{AB}(t) = \dfrac{q(t)}{C} = \dfrac{Q_m}{C}\cos(\omega_0 t + \phi_0)$ soit, en posant $U_m = \dfrac{Q_m}{C}$ :

$$\boxed{u_{AB}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \phi_0)}.$$

## 2. Intensité du courant

- Par définition, $i(t) = \dfrac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}$.

On a donc : $i(t) = -\,\omega_0 Q_m \sin(\omega_0 t + \phi_0)$, soit $i(t) = \omega_0 Q_m \cos\left(\omega_0 t + \phi_0 + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Avec $I_m = \omega_0 Q_m$, on obtient : $\boxed{i(t) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \phi_0 + \dfrac{\pi}{2}\right)}$.

- L'intensité du courant est déphasée de $\dfrac{\pi}{2}$ par rapport à la charge $q(t)$ et par rapport à la tension aux bornes du condensateur. Quand la tension est maximale, l'intensité est nulle et vice versa.

## 3. Échanges énergétiques dans un circuit LC

- L'énergie potentielle électrique stockée par le condensateur à la date $t$ est : $E_C = \dfrac{1}{2}\dfrac{q^2}{C}$, soit $E_C = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q_m^2}{C}\cos^2(\omega_0 t + \phi_0)$.
- L'énergie magnétique emmagasinée par la bobine à la date $t$ est :

$$E_L = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}L\omega_0^2 Q_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi_0).$$

Comme $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$, on a : $E_L = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q_m^2}{C}\sin^2(\omega_0 t + \phi_0)$.

- À chaque instant, l'expression de l'énergie totale est : $E = E_C + E_L$.

On calcule : $E = \dfrac{Q_m^2}{2C}\left[\cos^2(\omega_0 t + \phi_0) + \sin^2(\omega_0 t + \phi_0)\right]$, soit : $\boxed{E = \dfrac{Q_m^2}{2C} = \text{cte}}$.

À chaque instant il y a transformation mutuelle de l'énergie potentielle électrostatique en énergie magnétique ou l'inverse.

*Remarque : on constate que l'énergie stockée par le condensateur et l'énergie emmagasinée par la bobine ont une fréquence double de celle de la charge.*

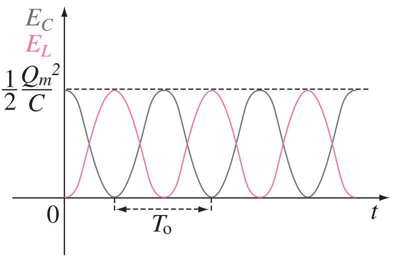


Fig. 8-6

# Exemple d'application

Un circuit $LC$ est constitué d'une bobine ($L$ = 50 mH ; $r = 0\ \Omega$) et d'un condensateur ($C$ = 20 µF) préalablement chargé et possédant une énergie initiale $E_C(t = 0) = 0{,}36$ mJ.

**1.** À partir de l'expression de l'énergie totale du système à un instant $t$ et sachant que cette énergie est constante, retrouver l'équation différentielle qui régit le régime périodique du système.

**2.** Donner l'expression de la tension instantanée aux bornes du condensateur et en calculer les caractéristiques.

## Corrigé commenté

***Indication :*** *pensez que si une grandeur est constante dans le temps, alors sa dérivée par rapport au temps est nulle.*

**1.** L'énergie totale de l'oscillateur électrique est :

$E = E_C + E_L$, soit $\boxed{E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2}$.

Cette énergie étant constante, on en déduit que : $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2C}2q\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{L}{2}2i\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$.

Or, $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dot{q}$ et $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{q}$, donc $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{C}q\dot{q} + L\dot{q}\ddot{q} = L\dot{q}\left(\ddot{q} + \frac{1}{LC}q\right) = 0$.

Quel que soit l'instant $t$, on a : $\boxed{\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0}$.

**2.** La solution de cette équation différentielle est : $q(t) = Q_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi_0\right)$.

On en déduit l'expression de la tension aux bornes du condensateur :

$$u_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{Q_m}{C}\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi_0\right),$$

soit : $\boxed{u_C(t) = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi_0\right)}$ avec $U_m = \frac{Q_m}{C}$.

Or, l'énergie initiale du condensateur a pour expression : $E_C = \frac{1}{2}C\,.\,U_m^2$.

On calcule : $U_m = \sqrt{\frac{2\,E_C(t=0)}{C}}$. AN : $U_m = \sqrt{\frac{2 \times 0{,}36.10^{-3}}{20.10^{-6}}} = \mathbf{6{,}0\ V}$.

La période est : $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$. AN : $T_0 = 2\pi\sqrt{50.10^{-3} \times 20.10^{-6}} = \mathbf{2\pi\,10^{-3}\ s}$.

À $t = 0$, $u_C(t) = U_m$ donc $\cos\phi_0 = 1$ et la phase à l'origine est $\phi_0 = \mathbf{0\ rad}$.

La tension $u_C(t)$ est alors : $u_C(t) = 6\cos\left(\frac{2\pi}{2\pi.10^{-3}}t\right) = \mathbf{6\cos(1\,000\,t)}$.

# 4 Amortissement et entretien des oscillations dans un circuit RLC

## 1. Amortissement dans un circuit LC

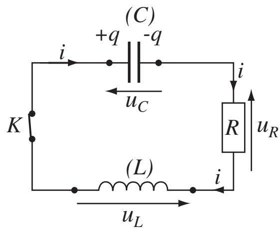

Fig. 8-7

- D'après la loi d'additivité des tensions :

$$u_C + u_R + u_L = 0,$$

soit : $\dfrac{q}{C} + Ri + \dfrac{di}{dt} = 0$ ou encore

$$\frac{q}{C} + \frac{di}{dt} = -Ri \quad (1).$$

- Or, à la date $t$, l'énergie électrique totale du circuit vaut : $E = \dfrac{1}{2}\dfrac{q^2}{C} + \dfrac{1}{2}Li^2$.

Dérivons cette expression par rapport au temps :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} + Li\frac{di}{dt} = \left(\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt}\right)i.$$

- D'après (1), on a : $\dfrac{dE}{dt} = (-Ri)\,i = -Ri^2$. On remarque que : $\dfrac{dE}{dt} < 0$ donc l'énergie totale diminue. Le terme ($-Ri^2$) représente la puissance évacuée par transfert thermique (effet Joule).

## 2. Entretien des oscillations

$u_g(t) = R_0 \,.\, i(t)$

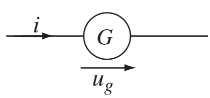

Fig. 8-8

- Pour entretenir les oscillations, il faut compenser les pertes d'énergie par effet Joule au moyen d'un montage électronique adapté faisant fonction d'un générateur capable de délivrer une tension $u_g(t)$ proportionnelle, à chaque instant, à l'intensité $i(t)$ du courant.

**Remarque :** *u et i sont représentées par des flèches de même sens, le générateur se comporte, à chaque instant, comme une résistance négative ($-R_0$).*

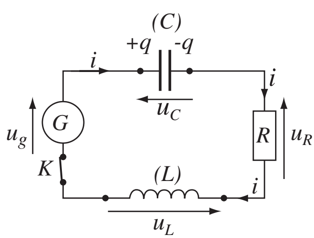

Fig. 8-9

- D'après la loi d'additivité des tensions :

$$u_C + u_R + u_L - u_g = 0,$$

soit : $\dfrac{q}{C} + Ri + L\dfrac{di}{dt} + (-R_0)\,i = 0$.

- Pour $R = R_0$, on retrouve l'équation différentielle régissant la variation de la charge $q$ du condensateur dans le temps pour un oscillateur électrique harmonique, c'est-à-dire sans amortissement :

$$\boxed{\ddot{q} + \frac{1}{LC} \cdot q = 0}.$$

- À la date $t$, la dérivée de l'énergie électrique totale du circuit vaut :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{C}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{q}{C} + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right)i = 0.$$

L'énergie totale est alors constante. Le dispositif électronique compense bien les pertes d'énergie par effet Joule.

## Exemple d'application

Un circuit comporte une bobine ($L$ = 5,6 mH ; $R$), un condensateur ($C$ = 4,7 µF) et un dipôle D. La tension $u_D$ aux bornes de celui-ci est proportionnelle à l'intensité du courant : $u_D = -R_0\, i$ ($R_0 > 0$).

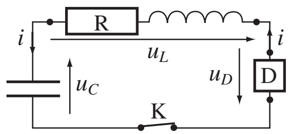


Fig. 8-10

**1.** Établir l'équation différentielle liant la tension $u_C$ aux bornes du condensateur à ses dérivées première $\dot{u}_C$ et seconde $\ddot{u}_C$.

**2.** Que se passe-t-il si $R = R_0$ ? Quel est l'intérêt du dipôle $D$ ?

**3.** Quelle est dans ce cas l'expression de la période ? Calculer sa valeur.

### Corrigé commenté

***Indication :*** *pensez que la tension aux bornes d'un condensateur est liée à sa charge par : $q = C.u_C$ ; par définition de l'intensité, $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dot{q} = C\,\dot{u}_C$ d'où : $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{q} = C\ddot{u}_C$.*

**1.** D'après la loi d'additivité des tensions, on a : $u_D + u_L + u_C = 0$,

soit : $-R_0 i + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + \frac{q}{C} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + (R - R_0)\,i + \frac{q}{C} = 0$,

d'où : $LC\ddot{u}_C + (R - R_0)\,C\dot{u}_C + u_C = 0$. On obtient: $\boxed{\ddot{u}_C + \frac{(R - R_0)}{L}\dot{u}_C + \frac{1}{LC}u_C = 0}$ (1).

**2.** Si $R = R_0$, l'équation différentielle (1) devient : $\ddot{u}_C + \frac{1}{LC}u_C = 0$ (2).

Cette équation différentielle (2) est celle qui régit le régime périodique d'un oscillateur électrique harmonique (sans amortissement) de période propre $T_0$. Le dipôle $D$ sert à compenser les pertes d'énergie par effet Joule dues à la résistance du circuit (bobine).

**3.** L'expression de la période $T_0$ a pour expression : $\boxed{T_0 = 2\,\pi\sqrt{LC}}$, soit $T_0 = 1{,}0.10^{-3}$ s.